

TD 17 : Structures algébriques

Calcul dans un groupe

Exercice 1 (Calcul dans un groupe). Soit (G, \cdot) un groupe. Développer et simplifier les expressions suivantes, ou résoudre les équations suivantes, avec $a, b, c, d, x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1) $(axa^{-1})^{-1}$

3) $(axa^{-1})^n$

5) $a^n x b^n = c$

2) $(abcd)^{-1}$

4) $axa^{-1} = b$

6) $a^{-1} x^{-1} = b^{-1}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

Exercice 3. Soit H un sous-groupe de \mathbb{Z} . Montrer que si $1 \in H$, alors $H = \mathbb{Z}$.

Exercice 4. On définit sur \mathbb{R} la loi $*$ par $a * b = a + b - ab$.

- 1) Montrer que $*$ est une l.c.i. associative sur \mathbb{R} . Trouver son élément neutre.
- 2) Est-ce que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe ?
- 3) Déterminer $z \in \mathbb{R}$ tel que $(\mathbb{R} \setminus \{z\}, *)$ soit un groupe.

Exercice 5. Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. notée \cdot . On dit que $a \in E$ est absorbant si : $\forall x \in E \quad ax = xa = a$.

- 1) Montrer que s'il existe un élément absorbant de E , celui-ci est unique.
- 2) Déterminer l'élément absorbant de (\mathbb{R}, \times) .
- 3) Soit X un ensemble. Déterminer l'élément absorbant de $(\mathcal{P}(X), \cup)$ et de $(\mathcal{P}(X), \cap)$.
- 4) On suppose que E admet un élément neutre e et un élément absorbant a . Montrer que $e = a$, puis $E = \{e\}$.

Exercice 6. Soit (G, \cdot) un groupe et H, K deux sous-groupes de G .

- 1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G .
- 2) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 7. Soit (G, \cdot) un groupe. On définit le centre de G comme l'ensemble des éléments $a \in G$ qui commutent avec tous les autres éléments de G , c'est-à-dire :

$$Z(G) := \{a \in G \mid \forall x \in G \quad ax = xa\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G . Si G est commutatif, que vaut son centre $Z(G)$?

Exercice 8. On pose T l'ensemble des translations de \mathbb{C} et S l'ensemble des similitudes de \mathbb{C} :

$$T = \{t_a \mid a \in \mathbb{C}\} \quad \text{avec} \quad t_a : z \mapsto z + a$$

$$S = \{\sigma_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\} \quad \text{avec} \quad \sigma_{a,b} : z \mapsto az + b$$

Montrer que T et S sont des sous-groupes de $(\text{Bij}(\mathbb{C}), \circ)$, où $\text{Bij}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des bijections de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . On déterminera d'abord les symétriques de t_a et $\sigma_{a,b}$ pour \circ .

Exercice 9 (*). On a vu dans un exercice précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Réciproquement, si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, montrer que H est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ à déterminer.

Indication : Lorsque $H \neq \{0\}$, on pourra commencer par montrer que $H \cap \mathbb{N}^*$ admet un minimum.

Morphismes de groupes

Exercice 10. Soit (G, \cdot) un groupe et $a \in G$. On pose

$$\begin{array}{lll} f_a : G \rightarrow G & g_a : G \rightarrow G & h_a : G \rightarrow G \\ x \mapsto ax & x \mapsto axa^{-1} & x \mapsto xax \end{array}$$

Est-ce que f_a , g_a et h_a sont des endomorphismes ? Des isomorphismes ? Des automorphismes ?

Exercice 11. On pose $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et on définit

$$\begin{array}{l} * : E \times E \rightarrow E \\ (r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2) \mapsto (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2) \end{array}$$

Justifier que $(E, *)$ est un groupe. On pose

$$\begin{array}{l} \varphi : E \rightarrow \mathbb{C}^* \\ (r, \theta) \mapsto r e^{i\theta} \end{array}$$

Montrer que φ est un morphisme de $(E, *)$ dans (\mathbb{C}^*, \times) . Déterminer son image et son noyau.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose

$$\begin{array}{l} \varphi_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \\ x \mapsto x^n \end{array}$$

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) . Est-ce un automorphisme ?
- 2) En déduire que \mathbb{U}_n est un sous-groupe de \mathbb{C}^* .

Calcul dans un anneau

Exercice 13. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément $x \in A$ est dit nilpotent lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

- 1) Soit $x, y \in A$. Montrer que si x est nilpotent et x, y commutent, alors xy est nilpotent.
- 2) Soit $x, y \in A$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
- 3) Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible et calculer $(1 - x)^{-1}$, où 1 désigne 1_A .

Exercice 14. Soit $(G, +)$ un groupe abélien. On note $\text{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G . On définit sur $\text{End}(G)$ les lois $+$ et \circ usuelles : $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

- 1) Montrer que $(\text{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.
- 2) On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G . Montrer que $(\text{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

Exercice 15. On note $A = \{m + n\sqrt{6} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

- 1) Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.
- 2) On pose $\varphi : A \rightarrow A$ définie pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ par $\varphi(m + n\sqrt{6}) = m - n\sqrt{6}$. Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau A .
- 3) On pose $N : A \rightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $x \in A$ par $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que pour tous $x, y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
- 4) Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
- 5) Vérifier que $5 + 2\sqrt{6}$ est inversible (dans A) et calculer son inverse.

Exercice 16 (Entiers de Gauss). On définit l'ensemble des entiers de Gauss par :

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

- 1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ muni des lois $+$ et \times usuelles est un sous-anneau de \mathbb{C} .
- 2) Soit $a + bi$ un entier de Gauss inversible. Montrer que $a^2 + b^2 = 1$.
- 3) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
- 4) Un entier de Gauss x est dit irréductible si, pour tous $y, z \in \mathbb{Z}[i]$,

$$x = yz \implies (y \in \mathbb{Z}[i]^\times \text{ ou } z \in \mathbb{Z}[i]^\times)$$

L'entier 2 est-il irréductible ?

Exercice 17 (*). Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\forall x \in A \quad x^2 = x$.

Montrer que pour tout $x \in A$, on a $-x = x$. En déduire que A est commutatif.

Anneaux intègres, corps

Exercice 18. Soit X un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(X)$ la loi de différence symétrique notée Δ par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

- 1) Montrer que $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ est un anneau (on pourra admettre l'associativité de Δ ...).
- 2) Cet anneau est-il intègre ? Quels sont les éléments inversibles ?

Exercice 19. Soit \mathbb{K} l'ensemble des complexes sous la forme $p + iq$ avec $p, q \in \mathbb{Q}$. Montrer que \mathbb{K} est un corps.

Exercice 20. Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre fini (i.e. de cardinal fini) et non trivial. Soit $a \in A \setminus \{0_A\}$.

- 1) Montrer que l'application f_a définie ci-dessous est injective :

$$\begin{aligned} f_a : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

- 2) Montrer que $f_a(A) = A$ (on pourra raisonner sur le cardinal). En déduire que f_a est bijective.
- 3) En déduire que a est inversible.
- 4) Montrer que A est un corps.